Université Paris-Diderot Année 2018-2019
UDMT42 - Topologie Algébrique (31NU01MF) M1 Maths

Interrogation écrite 1

14 Février 2019

Durée : 75 minutes

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. Considerons $Y = \{0,1\}$, avec la topologie τ_Y engendrée par $\{0\}$. Considerons $X = \mathbb{R} \times Y$, où $\mathbb{R}$ est considéré avec la topologie euclidienne et X avec la topologie produit.
Si $A \subseteq \mathbb{R}$, on dénote par A_j l'ensemble $A_j := A \times \{j\}$, pour $j = 0,1$.

(a) Quels ensembles parmi les suivants sont compacts dans X ?

$$A = [-1,1]_0 \cup \,]-2,2[_1, \qquad B = [-2,2]_0 \cup \,]-1,1[_1, \qquad C =]-1,1[_0 \cup [-2,2]_1, .$$

(b) Classifier les compactes de X (en analogie à : un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.)

Exercice 2. En $\mathbb{R}^3$ (avec la topologie euclidienne), considérons les sous-ensembles

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \qquad A = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |z| \leq 1\}.$$

(a) Décrire une structure de complexe cellulaire de $X = S \cup A$.

(Bonus : montrer que la structure de complexe cellulaire que vous avez décrit donne un espace homéomorphe à X.)

Soit maintenant $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence donnée par $v\mathcal{R}w$ si et seulement si $v = w$ ou $v, w \in S$ et $v = -w$.

(b) Montrer que X est homéomorphe au bouquet $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{S}^1$.